

УДК 621.73.043

Сосенушкин Е. Н.
Яновская Е. А.**УСТОЙЧИВОСТЬ ТРУБНЫХ ЗАГОТОВОК ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ
ФОРМОИЗМЕНЕНИИ**

При реализации процессов обработки давлением трубных заготовок, например с помощью операций обжима и раздачи, часто встречающимся видом брака является появление круговой волны на участке, передающим силу деформирования. Поэтому представляется актуальной задача изучения предельных состояний, при которых трубная заготовка теряет устойчивость. Рассмотрению условия потери устойчивости трубной заготовки как цилиндрической оболочки при сжатии с большой степенью деформации посвящено достаточно большое количество работ, среди которых [1–5]. Известные уравнения устойчивости оболочек и соответствующие им краевые и начальные условия связывают между собой бесконечно малые величины перемещений, деформаций и силовых факторов, что порой выходит за пределы возможностей теории оболочек, из которой они выведены [6]. Выдвинутый и теоретически обоснованный Д. Друккером [7] постулат о положительности работы добавочных внешних сил на вызванных ими перемещениях широко применяется исследователями на практике, без которого некоторые функциональные зависимости не реализуемы. Изучению устойчивости трубной заготовки, а точнее определению условий ее потери, посвящена работа [8]. Для анализа устойчивости использован энергетический критерий, основанный на балансе полной энергии деформирования. При искривлении срединной поверхности происходит поворот поперечных сечений, вызывающий дополнительные деформации сжатия на вогнутой стороне и растяжения – на выпуклой стороне боковой поверхности. При этом в деформированном состоянии поперечные сечения остаются перпендикулярными к изогнутой срединной поверхности, что уменьшает деформации сдвига. Выпучивание срединной поверхности приводит к перемещению торца заготовки, которое необходимо определить. Авторами проведен кинематический анализ, согласно которому получено поле перемещений возмущенного состояния, удовлетворяющее краевым условиям и условию несжимаемости. Известны и чисто экспериментальные работы, в которых определены соотношения геометрических параметров деформируемой трубы, при которых образуется складка [9, 10]. Определению статического критерия потери устойчивости с учетом анизотропии при различных операциях, посвящены работы [11, 12]. Автором [13] изучена потеря устойчивости трубы за пределами упругой области, предложен подход для определения геометрических и силовых параметров при пластической потере устойчивости, которые удовлетворительно согласуются с экспериментами.

Целью работы является установление взаимосвязи геометрических и силовых параметров при нагружении трубных заготовок с возможной потерей устойчивости недеформируемого участка, передающего технологическую силу в очаг деформации. Выявление причин потери устойчивости позволит избежать в дальнейшем нежелательного формоизменения, приводящего к браку.

Рассмотрим математическую модель потери устойчивости трубной заготовки при нагружении осевыми силами. Особенностью дифференциального уравнения устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии является третье слагаемое, учитывающее особенности формоизменения оболочки [3]:

$$\frac{d^2(\delta M)}{dx^2} + \sigma_x S \frac{d^2 \omega}{dx^2} + \frac{1}{R_{cp}} \delta T = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } \delta M = \int_{-S/2}^{S/2} \delta \sigma_x z dz; \quad \delta T = \int_{-S/2}^{S/2} \delta \sigma_y dy;$$

R_{cp} – радиус срединной поверхности исходной оболочки;

δM – приращение момента внутренних сил при изменении кривизны срединной поверхности оболочки;

δT – изменение дополнительно возникающей при потере устойчивости окружной силы, вследствие выпучивания срединной поверхности оболочки;

σ_x – сжимающее напряжение в направлении оси x ;

S – толщина оболочки;

ω – прогиб срединной поверхности;

$\frac{d^2\omega}{dx^2}$ – изменение кривизны срединной поверхности оболочки при выпучивании.

Если принять зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в виде степенной функции:

$$\sigma_i = A \cdot \varepsilon_i^n, \quad (2)$$

где A – числовой коэффициент, зависящий от свойств материала;

n – коэффициент деформационного упрочнения, то напряжения, деформации и их приращения выразятся следующими соотношениями:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_x; \quad \delta\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta\sigma_x; \quad \sigma_y = \frac{\sigma_x}{2}; \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_x; \quad \delta\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta\varepsilon_x; \quad \delta\varepsilon_x = \delta\sigma_i \left(\sigma_x - \frac{\sigma_z}{2} \right).$$

Отсюда:
$$\sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i; \quad \delta\sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta\sigma_i.$$

И после соответствующих подстановок:

$$\sigma_x = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n} A \varepsilon_x^n; \quad \sigma_i = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n} A \varepsilon_i^n; \quad E_k = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}; \quad E_k = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n} n A \varepsilon_i^{n-1}.$$

Для определения приращения напряжений сжатия воспользуемся зависимостью между приращением деформации и напряжением $\delta\varepsilon_x = \delta\sigma_i \left(\sigma_x - \frac{\sigma_z}{2} \right) \frac{1}{\sigma_i E_k}$, отсюда:

$$\delta\sigma_x = \frac{4}{3} E_k \delta\varepsilon_x. \quad (3)$$

С момента появления складки осадка заготовки начинает происходить за счет выпучивания стенки (рис. 1). В этом случае $\delta\varepsilon_x = -\delta\varepsilon_y$, $\delta\sigma_x = -\delta\sigma_y$ и из уравнения (3) $\delta\sigma_y = \frac{4}{3} E_k \delta\varepsilon_y$.

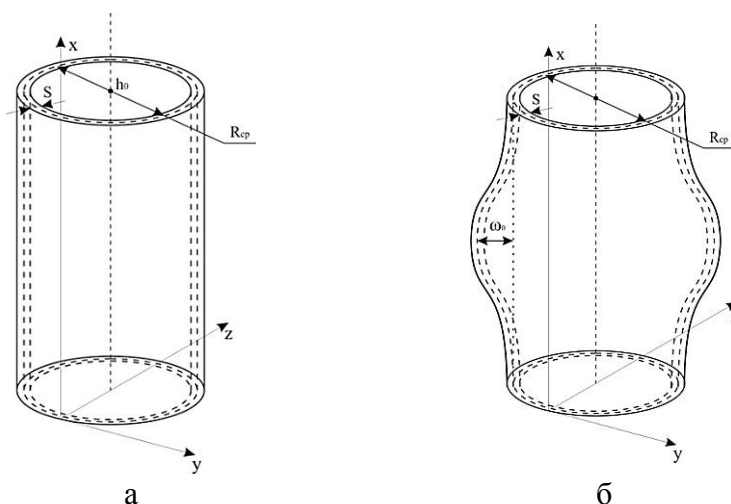


Рис. 1. Геометрические параметры цилиндрической оболочки в исходном состоянии (а) и в момент потери устойчивости (б)

По гипотезе плоских сечений при изгибе принимается линейная зависимость приращений деформаций по толщине оболочки, т. е. отрезок интегрирования симметричен:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \varepsilon_0 + z \cdot \frac{d^2 \omega}{dx^2}; \quad \delta \varepsilon_y = -\frac{\omega}{R_{\text{cp}}}, \quad (4)$$

Отсюда очевидно получим:

$$\frac{1}{9} E_k S^3 \cdot \frac{d^4 \omega}{dx^4} + \sigma_x S \frac{d^2 \omega}{dx^2} - \frac{4}{3} E_k \frac{\omega S}{R_{\text{cp}}^2} = 0$$

и преобразования:

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + \frac{9\sigma_x}{S^2 E_k} \frac{d^2 \omega}{dx^2} - \frac{12}{S^2 R_{\text{cp}}^2} \omega = 0 \quad \text{или} \quad \omega^{IV} + a_2 \omega'' - b_2 \omega = 0. \quad (5)$$

При замене переменных $a_2 = \frac{9\sigma_x}{E_k S^2}$, $b_2 = \frac{12}{S^2 R_{\text{cp}}^2}$ окончательно уравнение примет вид $\omega^{IV} + a_2 \omega'' - b_2 \omega = 0$. Граничные условия:

$$x = 0, \quad \omega = 0; \quad x = h, \quad \omega = 0; \quad x = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0; \quad x = h, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Характеристическое уравнение для полученного линейного уравнения имеет вид:

$$\lambda^4 + a_2 \lambda^2 - b_2 = 0.$$

Из этого биквадратного уравнения находим спектр собственных частот дифференциального оператора. Дискриминант биквадратного уравнения имеет вид:

$$D = a_2^2 + 4b_2 = \frac{81\sigma_x^2}{E_k^2 S^4} + \frac{48}{S^2 R_{\text{cp}}^2}, \quad \text{тогда:}$$

$$\lambda^2 = -a_2 \pm \sqrt{D} = -\frac{9\sigma_x}{E_k S^2} \pm \sqrt{\frac{81\sigma_x^2}{E_k^2 S^4} + \frac{48}{S^2 R_{\text{cp}}^2}}, \quad \lambda^2 = -\frac{9\sigma_x}{E_k S^2} \pm \frac{1}{E_k S^2} \sqrt{\frac{81\sigma_x R_{\text{cp}}^2 + 48E_k^2 S^2}{R_{\text{cp}}^2}},$$

$$\lambda^2 = -\frac{9\sigma_x}{E_k S^2} \pm \frac{1}{E_k S^2 R_{\text{cp}}^2} \sqrt{81\sigma_x R_{\text{cp}}^2 + 48E_k^2 S^2}.$$

Следовательно, решение дает два корня комплексных:

$$\lambda_{1;2} = \pm \sqrt{\frac{9\sigma_x}{E_k S^2} + \frac{1}{E_k S^2 R_{\text{cp}}^2} \sqrt{81\sigma_x R_{\text{cp}}^2 + 48E_k^2 S^2} i}, \quad (6)$$

а другие два – действительных:

$$\lambda_{3;4} = \pm \sqrt{\frac{1}{E_k S^2 R_{\text{cp}}^2} \sqrt{81\sigma_x R_{\text{cp}}^2 + 48E_k^2 S^2} - \frac{9\sigma_x}{E_k S^2}}. \quad (7)$$

Фундаментальная система решений в этом случае имеет вид: $e^{\lambda_3 x}$; $e^{\lambda_4 x}$; $\cos \lambda_1 x$; $\sin \lambda_1 x$.

Общее решение линейного дифференциального уравнения запишется:

$$\omega = C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_1 x.$$

Из нулевых граничных условий находим, что $C_3 = C_4 = C_1 \equiv 0$, то есть для того, чтобы решение было нетривиальным необходимо и достаточно, чтобы:

$$C_2 \sin \lambda_1 x = 0, \quad \sin \lambda_1 x = 0, \quad \lambda_1 x = \pi m, \quad \text{где } m \in Z, \quad x = \frac{\pi m}{\lambda_1}, \quad \text{где } m \in Z.$$

При этом форма изогнутой поверхности оболочки при потере устойчивости описывается с точностью до масштаба зависимостью:

$$\omega_m = A_m \sin \frac{\pi m}{\lambda_1}. \quad (8)$$

Для нахождения нетривиального решения изгиба тонкой оболочки воспользуемся условием изгиба стенки оболочки посередине. Для этого случая граничные условия:

$$\begin{aligned} \omega = 0 & \quad \text{при } x = 0; & \omega = -\omega_0 & \quad \text{при } x = \frac{h}{2}; \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 & \quad \text{при } x = 0; & \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 & \quad \text{при } x = \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

В общем случае:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \lambda_3 C_3 e^{\lambda_3 x} + \lambda_4 C_4 e^{\lambda_4 x} - \lambda_1 C_1 \cos \lambda_1 x + \lambda_1 C_2 \sin \lambda_1 x.$$

Составим систему линейных уравнений для нахождения констант:

$$\begin{cases} C_3 + C_4 + C_1 = 0; \\ C_3 e^{\lambda_3 \frac{h}{2}} + C_4 e^{\lambda_4 \frac{h}{2}} + C_1 \cos \frac{\lambda_1 h}{2} + C_2 \sin \frac{\lambda_1 h}{2} = -\omega_0; \\ \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4 + \lambda_1 C_1 = 0 \\ \lambda_3 C_3 e^{\lambda_3 \frac{h}{2}} + \lambda_4 C_4 e^{\lambda_4 \frac{h}{2}} - \lambda_1 C_1 \sin \frac{\lambda_1 h}{2} + \lambda_1 C_2 \cos \frac{\lambda_1 h}{2} = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему методом Жордана-Гаусса, получаем значения для постоянных $C_1; C_2; C_3; C_4$:

$$C_1 = -\frac{\varphi+1}{\psi} \omega_0; \quad C_2 = -\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \varphi + \frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right) \frac{1}{\psi} \omega_0; \quad C_3 = \frac{\varphi}{\psi} \omega_0; \quad C_4 = \frac{1}{\psi} \omega_0, \quad (9)$$

где функции φ и ψ заданы следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi = -\frac{\lambda_4 e^{\lambda_4 \frac{h}{2}} + \lambda_1 \sin \frac{\lambda_1 h}{2} - \lambda_4 \cos \frac{\lambda_1 h}{2}}{\lambda_3 e^{\lambda_3 \frac{h}{2}} + \lambda_1 \sin \frac{\lambda_1 h}{2} - \lambda_3 \cos \frac{\lambda_1 h}{2}}; \quad \psi = \frac{(e^{\lambda_3 \frac{h}{2}} - \cos \frac{\lambda_1 h}{2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \sin \frac{\lambda_1 h}{2})(-\lambda_4 e^{\lambda_4 \frac{h}{2}} - \lambda_1 \sin \frac{\lambda_1 h}{2} + \lambda_3 \cos \frac{\lambda_1 h}{2})}{\lambda_3 e^{\lambda_3 \frac{h}{2}} + \lambda_1 \sin \frac{\lambda_1 h}{2} - \lambda_3 \cos \frac{\lambda_1 h}{2}} + \\ + (e^{\lambda_4 \frac{h}{2}} - \cos \frac{\lambda_1 h}{2} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \sin \frac{\lambda_1 h}{2}). \end{aligned} \quad (10)$$

После подстановки полученных констант в общее решение получим аналитическое выражение для расчета прогиба срединной поверхности цилиндрической оболочки:

$$\omega = \frac{\varphi}{\psi} \omega_0 e^{\lambda_3 x} + \frac{\omega_0}{\psi} e^{\lambda_4 x} - \frac{\varphi+1}{\psi} \omega_0 \cos \lambda_1 x - \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \varphi + \frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right) \frac{1}{\psi} \omega_0 \sin \lambda_1 x, \quad (11)$$

где $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ – выражаются по формулам (6), (7).

Решение задачи устойчивости цилиндрической оболочки в классической постановке при осесимметричной форме потери устойчивости с использованием уравнения изгиба $D \frac{d^4 \omega}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} \omega = P_z$, приводит к известным решениям теории упругости, которые являются ключевыми при прогнозировании изменения геометрии оболочки в момент потери устойчивости [1–5, 11]:

– длина волны при локальной потере устойчивости упругой цилиндрической оболочки:

$$L = 2\pi^4 \sqrt{\frac{R^2 s^2}{12(1-\mu^2)}}; \quad (12)$$

– критическое число полуволн:

$$m_{кр} = \frac{h}{\pi^2 R} \sqrt{\frac{R}{s}} \cdot \sqrt[4]{12(1-\mu^2)}; \quad (13)$$

– критическое осевое сжимающее напряжение:

$$\sigma_{кр} = \frac{ES}{R\sqrt{3}\sqrt{1-\mu^2}}; \quad (14)$$

– суммарная критическая сжимающая сила:

$$P_{кр} = 2\pi R\sigma_{кр}S = \frac{2\pi ES^2}{\sqrt{3}\sqrt{1-\mu^2}}. \quad (15)$$

Модель прогиба цилиндрической оболочки в соответствии с полученной аналитической зависимостью (11) позволила проанализировать поведение трубных заготовок с разной начальной высотой при фиксированной относительной толщине стенки. Согласно графику, приведенному на рис. 2, а при увеличении начальной высоты трубной заготовки увеличивается и величина прогиба. На рис. 2, б показано изменение прогиба в зависимости от высотной координаты трубной заготовки в процессе деформирования. Из графика видно, что выпучивание происходит наружу с образованием волны, близкой к симметричной форме. Большое влияние на потерю устойчивости трубной заготовки и на величину прогиба оказывает относительная толщина стенки S/R . По графику на рис. 3, а можно количественно оценить прогиб в месте образования круговой волны.

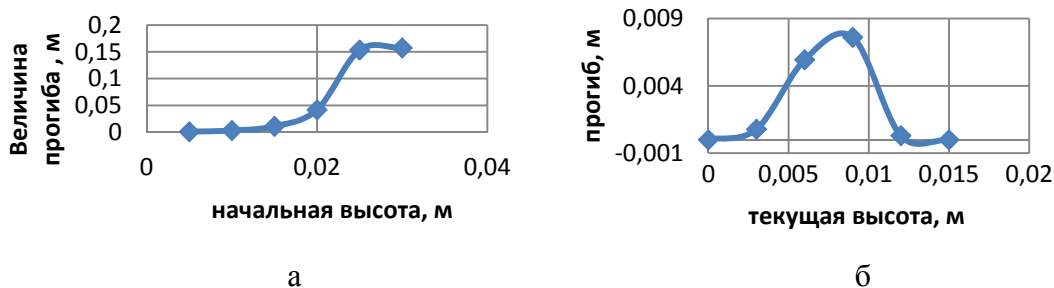


Рис. 2. Характер изменения прогиба в зависимости от:
 а – начальной высоты трубной заготовки; б – высотной координаты

С увеличением относительной толщины трубной заготовки геометрия в связи с потерей устойчивости искажается больше. Прогнозирование критического количества полуволн на основе зависимости (13) при потере устойчивости цилиндрической оболочки бывает полезным с точки зрения дефектообразования, так как дает возможность качественно оценить формоизменение недеформируемого участка трубы, передающего технологическую силу к очагу деформации при выполнении операции раздачи. Влияние таких технологических параметров, как относительная толщина трубной заготовки и ее высота, на количество образующихся полуволн при потере устойчивости цилиндрической оболочки, торцы которой нагружены осевой равномерно распределенной силой, иллюстрирует график, приведенный на рис. 3, б.

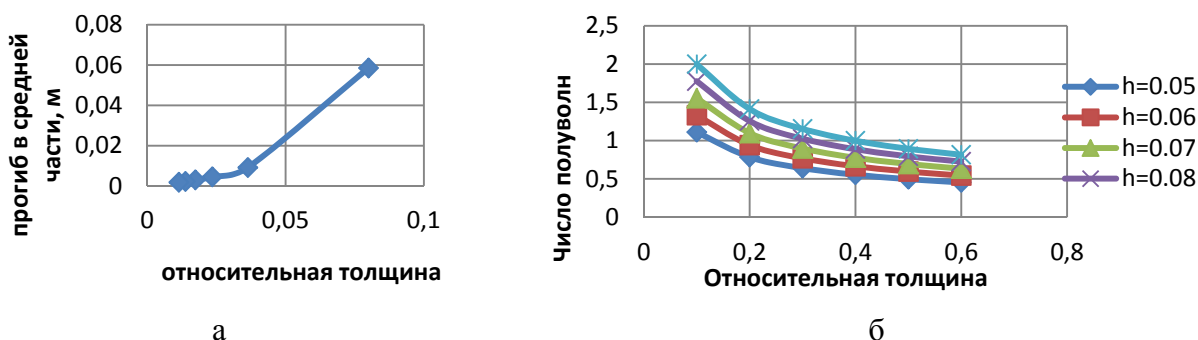


Рис. 3. Влияние относительной толщины стенки S/R на:

а – величину прогиба трубной заготовки в месте образования круговой волны;
 б – число полуволн при потере устойчивости цилиндрической оболочки при разных высотах заготовок h

С ростом относительной толщины трубной заготовки, количество полуволн уменьшается. Очевидно, что при одной и той же относительной толщине заготовки, количество полуволн увеличивается при увеличении высоты заготовки. Это является закономерным и не противоречит известным экспериментальным данным [12, 13]. Расчет критических напряжений, ответственных за потерю устойчивости цилиндрической оболочки, проводился в соответствии с зависимостью (14). Установлен характер изменения значений напряжений $\sigma_{кр}$ от относительной толщины заготовки, с ростом которой увеличивается и критическое напряжение, причем изменение происходит по линейному закону, как показано на рис. 4, а. Критические напряжения упругой потери устойчивости значительно превышают напряжения текучести, поэтому локальной потере устойчивости предшествует однородная пластическая деформация осевого сжатия, которая вследствие упрочнения металла существенно повышает критическое напряжение при пластической потере устойчивости. Начальная стадия образования кольцевой волны происходит при повышенных осевых напряжениях сжатия с малой кривизной образующей и моделируется уравнениями мембранной теории жесткопластической оболочки [13]. Конечная стадия образования складки моделируется автором [13] уравнениями идеально пластического изгиба с конечной кривизной криволинейных участков с учетом окружных напряжений и деформаций.

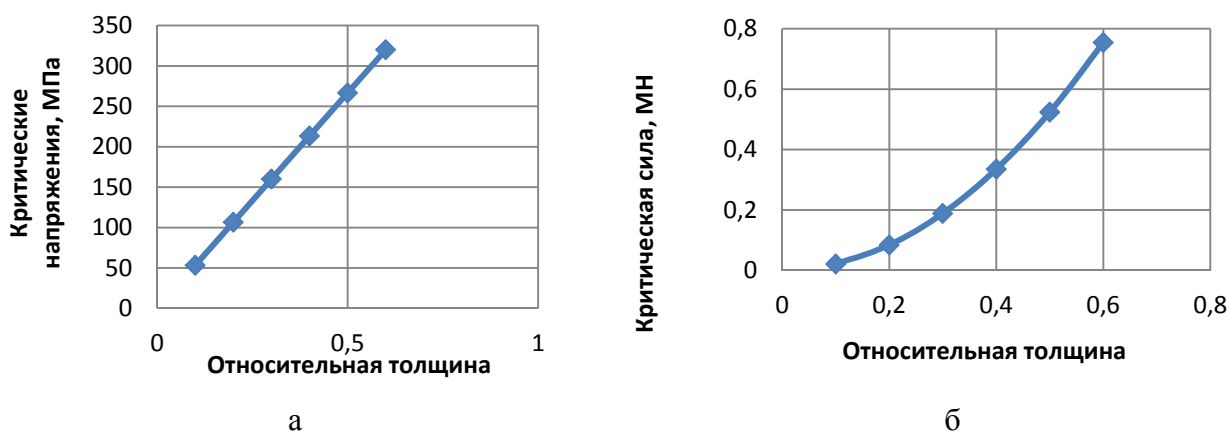


Рис. 4. Влияние относительной толщины S/R цилиндрической оболочки на изменение: а – критических напряжений при потере устойчивости; б – критической силы, ответственной за потерю устойчивости

Критическая сила, при которой наступает момент потери устойчивости, также растет при увеличении относительной толщины трубной заготовки, как показывает график на рис. 4, б. Характер изменения критической силы нелинейный параболический.

Эксперименты проводились на заготовках из стали 12Х18Н10Т диаметром 63,5 мм и высотой 15; 25; 40 и 60 мм. Рис. 5 иллюстрирует формоизменение заготовок разной высоты в момент потери устойчивости. На рис. 6 показан характер изменения силовых факторов.

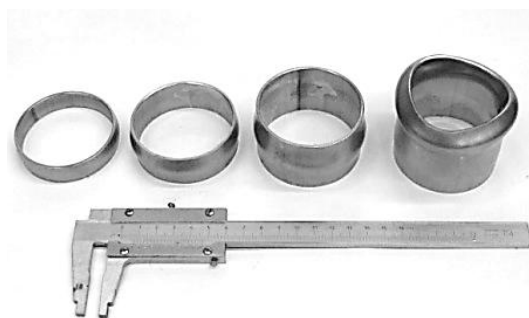


Рис. 5. Примеры потери устойчивости разных по высоте трубных заготовок

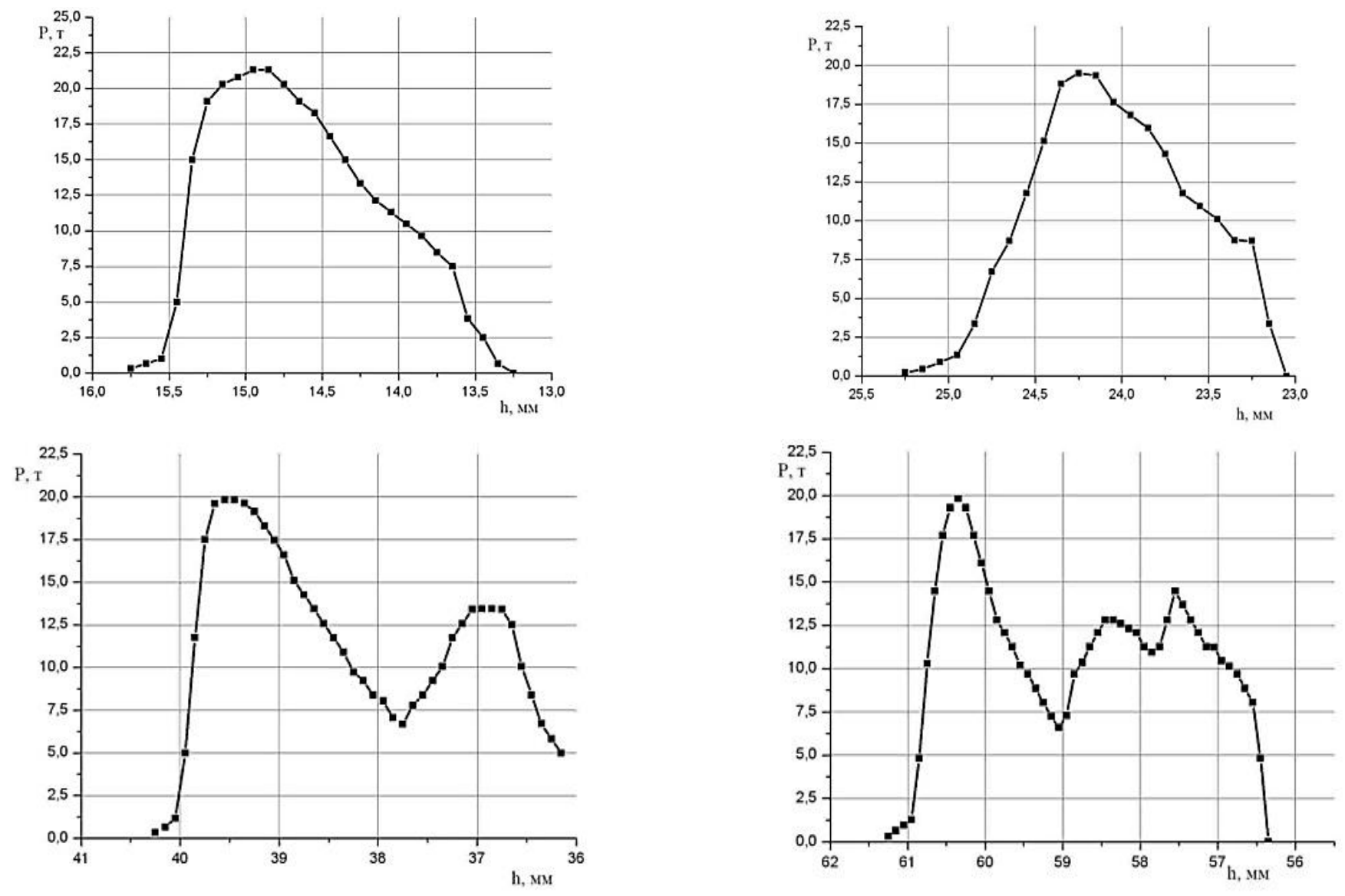


Рис. 6. Диаграммы «сила–ход» при деформировании образцов

ВЫВОДЫ

Установлена взаимосвязь условий потери устойчивости цилиндрической трубной заготовки с ее геометрическими параметрами и энергосиловыми характеристиками реализуемого технологического процесса. На основе выявленных связей разработана математическая модель прогиба срединной поверхности цилиндрической трубы, проведен анализ характера изменения и численных значений изгиба стенки в момент потери устойчивости. Проведен анализ влияния относительной толщины стенки трубы на количество образующихся полуволн, на критические напряжения и силы, при которых заготовка теряет устойчивость.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С. П. *Прикладная теория упругости* / С. П. Тимошенко, Дж. Лессельс. – М. – Ленинград : НТИ, 1931. – 392 с.
2. Iguchi S. *Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vieseitigfreienrechteckigen Platte* / S. Iguchi // *Ingenieur – Archiv. Fünftes und sechstes (schluss) Heft. – XXL Band, 1953. – P. 303–322.*
3. Алфутов Н. А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем* / Н. А. Алфутов. – М. : Наука, 1978. – 312 с.
4. Вольмир А. С. *Устойчивость деформируемых систем* / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
5. Бебрис А. А. *Устойчивость заготовки в формоизменяющих операциях листовой штамповки* / А. А. Бебрис. – Рига : Зинатне, 1978. – 127 с.
6. Пикуль В. В. *К теории устойчивости оболочек* / В. В. Пикуль // *Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 81–86.*
7. Друккер Д. *Определение устойчивого неупругого материала* / Д. Друккер // *Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей. – М. : Иностранная литература, 1960. – № 2. – С. 55–70.*
8. Давыдов О. Ю. *Анализ деформирования тонкостенных труб в закрытой матрице* / О. Ю. Давыдов, В. Г. Егоров, П. Д. Чудаков // *Кузнечно-штамповочное производство. – 1997. – № 5. – С. 4–6.*
9. Ренне И. П. *Экспериментальное исследование устойчивости пластической деформации кромки трубы при раздаче коническим пуансоном* / И. П. Ренне, В. А. Каюшин // *Кузнечно-штамповочное производство. – 1988. – № 9. – С. 16–17.*
10. Пашкевич А. Г. *Устойчивость цилиндрических оболочек в процессах штамповки осевым усилием* / А. Г. Пашкевич, М. Ф. Каширин // *Кузнечно-штамповочное производство. – 1974. – № 3. – С. 18–19.*
11. Пилипенко О. В. *Влияние анизотропии механических свойств трубных заготовок на технологические параметры раздачи* / О. В. Пилипенко // *Известия ТулГУ. Серия Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2006. – Вып. 1. – С. 149–158.*
12. Сосенушкин Е. Н. *Статический критерий устойчивости трубных анизотропных заготовок* / Е. Н. Сосенушкин, Е. И. Третьякова, А. Махдиян // *Известия ТулГУ. Технические науки. – 2008. – Вып. 2. – С. 169–176.*
13. Непершин Р. И. *Пластическая потеря устойчивости при осевом сжатии трубы* / Р. И. Непершин // *Вестник СГАУ. – 2011. – № 3 (27). – Ч. 1. – С. 329–336.*

Сосенушкин Е. Н. – д-р техн. наук, проф., зав. каф. МГТУ «Станкин»;

Яновская Е. А. – доц. МГТУ «Станкин».

МГТУ «Станкин» – Московский государственный технологический университет «Станкин», г. Москва, Россия.

E-mail: sen@stankin.ru; elena_yanovskaya@bk.ru

Статья поступила в редакцию 03.02.2012 г.